

Total No. of printed pages : 8

3 (Sem-1) MAT

2022

## MATHEMATICS

( General )

( Classical Algebra and Trigonometry )

Full Marks : 60

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks  
for the questions

Answer either in English or in Assamese

### PART—I

1. Answer the following questions : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a)  $f(x) = 0$  is a cubic equation and  $(x + \alpha)$  is a factor of  $f(x)$ . Write all the roots of the equation  $f(x) = 0$  if  $\gamma + i\beta$  is one of the roots.

$f(x) = 0$  এটা ত্ৰিঘাত সমীকৰণ আৰু  $f(x)$ ৰ এটা উৎপাদক  $(x + \alpha)$ .  $f(x) = 0$  সমীকৰণৰ আটাইবোৰ মূল লিখা যদি  $\gamma + i\beta$  এটা মূল হয়।

(b) Write true or false for the following statement :

তলত দিয়া উক্তিটোৰ বাবে সত্য বা অসত্য লিখা :

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  where (য'ত)  $z_1, z_2$  are any complex numbers (যি কোনো জটিল সংখ্যা)।



( 2 )

(c) If (যদি)  $z = \bar{z}$ , then (তেহে)  $I_m z = ?$   
Where (য'ত)  $z$  is complex number (জটিল সংখ্যা).

(d) State De Moiver's theorem.

ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যটো লিখা ।

(e) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of  $cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ , then find the equation whose roots are  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ .

$cx^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$  সমীকৰণটোৰ মূল  $\alpha, \beta$  আৰু  $\gamma$  হ'লে  $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$  মূলযুক্ত সমীকৰণটো নিৰ্ণয় কৰা ।

(f) If  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  are the roots of  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ , then find the value of  $\Sigma \alpha_1^2$ .

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$  সমীকৰণৰ মূলকেইটা  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  হ'লে  $\Sigma \alpha_1^2$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ।

(g) Find the limit of the following sequence :

তলৰ অনুক্রমটোৰ সীমা উলিওৱা :

$$u_n = \left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$$

( 3 )

## PART—II

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Find  $\text{mod } z$  and  $\text{arg } z$ , where  $z = -i$ . $z = -i$  হ'লে  $\text{mod } z$  আৰু  $\text{arg } z$  নিৰ্ণয় কৰা।(b) If  $a, b, c$  are real, then prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

যদি  $a, b, c$  বাস্তৱ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

(c) Test the convergence of the following series whose  $n$ th term is given by

$$u_n = (-1)^n$$

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা যাৰ  $n$ তম পদটো

$$u_n = (-1)^n$$

(d) If the sum of two roots of the equation  $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$  is 0, then prove that  $a_1a_2 = a_3$ . $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$  সমীকৰণৰ দুটা মূলৰ যদি যোগফল শূন্য হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে  $a_1a_2 = a_3$ .

(Contd.)



( 4 )

## PART—III

3. Answer any *three* of the following questions :

5×3=15

তলব যি কোনো তিনিটা প্রশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If (যদি)  $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$ ,  $y = \cos\beta + i\sin\beta$ ,  
 $z = \cos\gamma + i\sin\gamma$  and (আৰু)  $x + y + z = 0$ ,  
 then show that (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

(b) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}$$

(c) Show that (দেখুওৱা যে)

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots$$

(d) If (যদি)  $\sinh(u + iv) = x + iy$ , then prove that  
 (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$\frac{x^2}{\sinh^2 u} + \frac{y^2}{\cosh^2 u} = 1$$

(e) If (যদি)  $A + iB = \log(x + iy)$ , then show that  
 (তেন্তে দেখুওৱা যে)

$$A = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2), \quad B = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

## PART—IV

4. Answer either (a) or (b) : 10

(a) অথবা (b)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) (i) Apply Cauchy-Schwarz inequality to prove that

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq 9$$

where  $a, b, c$  and  $x, y, z$  are positive real numbers. 4

কছি-স্চৱাৰ্জৰ অসমতাৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰা যে

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right) \geq 9$$

য'ত  $a, b, c$  আৰু  $x, y, z$  ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা।

(ii) Test the convergence of the following series : 6

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^3}{5} + \dots$$

(b) (i) If (যদি)  $a > 0, b > 0, c > 0$  and (আৰু)  $a + b + c = 1$ , then prove that (তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে)

$$8abc \leq (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{8}{27} \quad 4$$

(Contd.)



( 6 )

(ii) Define absolutely convergent series with an example.

Examine the convergence of the following infinite series :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ to } \infty$$

Show that it is conditionally convergent. 2+3+1=6

উদাহরণসহ পৰম অভিসাৰী শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা দিয়া ।

তলত দিয়া অসীম শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \text{ to } \infty$$

দেখুওৱা যে ই চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী ।

5. (a) Solve by Cardan's method : 6

কাৰ্ডনৰ নিয়মেৰে সমাধা কৰা :

$$x^3 - 30x + 133 = 0$$

(b) (i) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ , form an equation whose roots are  $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$ . 4

$x^3 - px^2 + qx - r = 0$  সমীকৰণৰ মূলকেইটা

$\alpha, \beta, \gamma$  হ'লে  $\beta\gamma + \frac{1}{\alpha}, \gamma\alpha + \frac{1}{\beta}, \alpha\beta + \frac{1}{\gamma}$

মূলযুক্ত সমীকৰণ এটা গঠন কৰা ।



Or / নাইবা

(ii) If  $\alpha, \beta, \gamma$  are the roots of the equation  $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ , then find the value of  $\Sigma \alpha^3 \beta^3$ .

যদি  $\alpha, \beta, \gamma, x^3 + px^2 + qx + r = 0$  সমীকরণটোৰ বীজ হয়, তেন্তে  $\Sigma \alpha^3 \beta^3$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

6. Answer either (a) and (b) or (a) and (c) :

(a) আৰু (b) অথবা (a) আৰু (c)ৰ উত্তৰ কৰা :

(a) If  $a, b, c$  denote the sides of a triangle and  $2s = a + b + c$ , then prove that

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c) \quad 4$$

যদি  $a, b, c$  কোনো ত্ৰিভুজৰ বাহু হয় আৰু  $2s = a + b + c$ , তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

(b) Examine if the sequence  $\{u_n\}$ , where  $u_n = \left\{ \frac{1}{n} + 2(-1)^n \right\}$  is bounded and has a limit. Is it a convergent sequence?

$$2+2+2=6$$

$\{u_n\}$  অনুক্রমটোৰ পৰিষ্কাৰ হয় নে নহয় আৰু সীমা আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰা য'ত  $u_n = \left\{ \frac{1}{n} + 2(-1)^n \right\}$

এইটো অভিসৰী অনুক্রম হয়নে?

(Contd.)

(c) State Sandwich theorem and applying this theorem prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1$$

$$1+5=6$$

ছেদউইছব উপপাদ্যটো লিখা আৰু এই উপপাদ্যটো প্ৰয়োগ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1$$

\*\*\*