Total number of printed pages–11

1 (Sem–1/FYUGP) MAT41MN/(A)

2025

MATHEMATICS

(Minor)

Paper : MAT4100104 MN

(SET–A)

(Classical Algebra)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

1. Answer the following questions : 1×8=8

   নিম্নোক্ত প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

   (a) Write the argument of the complex number $(-1-i)$.

   $(-1-i)$ জটিল সংখ্যাটোৰ কোণাংকটো লিখা।

(b) For $n \in \mathbb{Z}, (\sin\theta + i\cos\theta)^n = ?$

$n \in \mathbb{Z}$-ৰ বাবে $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = ?$

(c) Mention the general value of $\log(1-i)$.

$\log(1-i)$-ৰ সাধাৰণ মানটো উল্লেখ কৰা।

(d) State Descarte's Rule of signs for negative roots of an equation.

এটা সমীকৰণৰ ঋণাত্মক মূলৰ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়মটোৰ উক্তিটো লিখা।

(e) Is $x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 25x^2 + 10x - 1 = 0$ a reciprocal equation?

$x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 25x^2 + 10x - 1 = 0$ সমীকৰণটো পাৰস্পৰিক হয়নে?

(f) If α, β, γ are the roots of $x^3 + px^2 + q = 0$, then $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$ ________.

(Fill up the blank)

যদি $x^3 + px^2 + q = 0$ সমীকৰণৰ মূলকেইটা α, β, γ হয়, তেন্তে $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 =$ ________।

(খালী স্থানখিনি পূৰ কৰা)

(g) Give examples of two non-zero matrices A and B such that AB is a zero matrix.

দুটা অশূন্য মৌলকক্ষ A আৰু B উদাহৰণ দিয়া যাতে AB এটা শূন্য মৌলকক্ষ হয়।

(h) What is the rank of a matrix in Echelon form ?

Echelon-আকাৰত থকা মৌলকক্ষ এটাৰ কোটি কি হ'ব?

2. Answer ***any six*** questions from the following : 2×6=12

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা ***যিকোনো ছটাৰ*** উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Express $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ in polar form.

$1+\cos\alpha+i\sin\alpha$-ক ধ্ৰুৱীয় আকাৰত প্ৰকাশ কৰা।

(b) Solve the equation $x^4+i=0$.

$x^4+i=0$ সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(c) Separate $e^{a+i\pi/2}$ into real and imaginary parts.

$e^{a+i\pi/2}$ জটিল সংখ্যাটোক বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশলৈ পৃথক কৰা।

(d) If the sum of two roots of the equation $x^3+6x^2-3x+18=0$ is zero, then solve it.

যদি $x^3+6x^2-3x+18=0$ সমীকৰণৰ দুটা মূলৰ সমষ্টি শূন্য হয় তেন্তে তাক সমাধান কৰা।

(e) Prove that :

প্ৰমাণ কৰা যে :

$$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}, n \in \mathbb{Z}$$

(f) Using Descartes' rule of signs discuss briefly the nature of the roots of the equation $x^6+x^4+x^2+x+3=0$.

ডেকাৰ্টৰ চিহ্নৰ নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি চমুকৈ $x^6+x^4+x^2+x+3=0$ সমীকৰণটোৰ মূলসমূহৰ প্ৰকৃতি সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা।

(g) If $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ and α_4 are the roots of the equation $x^4+p_2x^2+p_3x+p_4=0$, then show that $\Sigma\alpha^6 = 6p_2p_4+3p_3^2-2p_2^3$.

যদি $x^4+p_2x^2+p_3x+p_4=0$ সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ আৰু α_4 হয়, তেন্তে দেখুউৱা যে : $\Sigma\alpha^6 = 6p_2p_4+3p_3^2-2p_2^3$.

(h) Express a square matrix A as the sum of a symmetric and a skew-symmetric matrix.

এটা বৰ্গাকৃতিৰ মৌলকক্ষ A-ক এটা প্ৰতিসম আৰু এটা তীৰ্যক প্ৰতিসম মৌলকক্ষৰ সমষ্টি হিচাপে প্ৰকাশ কৰা।

(i) If A is a non-singular matrix, then show that $|A^{-1}| = (|A|)^{-1}$.

যদি A এটা অনাএকবচনীয় মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে দেখুউৱা যে $|A^{-1}| = (|A|)^{-1}$.

(j) Establish that the rank of a matrix whose every element is equal to unity is 1.

এটা মৌলকক্ষৰ প্ৰতিটো উপাদান 1-ৰ সমান হ'লে তাৰ কোটি 1 হ'ব বুলি প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

3. Answer ***any four*** : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) If z_1 and z_2 are two complex numbers, then prove that $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

যদি z_1 আৰু z_2 দুটা জটিল সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(b) For two complex numbers z and z' show that $E(z) \cdot E(z') = E(z + z')$.

দুটা জটিল সংখ্যা z আৰু z'-ৰ বাবে দেখুউৱা যে $E(z) \cdot E(z') = E(z + z')$.

(c) If z is a non-zero complex number and m is a positive integer, then prove that $Log\, z^m \neq m\, Log z$.

যদি z এটা অশূন্য জটিল সংখ্যা আৰু m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $Log\, z^m \neq m\, Log z$.

(d) Expand $sin^4 \theta cos^2 \theta$ in a series of cosines of multiples of θ.

$sin^4 \theta cos^2 \theta$-ক θ-ৰ গুণিতকৰ কোচাইনৰ শ্ৰেণীত বিস্তাৰ কৰা।

(e) If $f(x)$ is a polynomial with real coefficients and $f(x) = 0$ has n real roots, then prove that $f'(x) = 0$ has at least $(n - 1)$ real roots.

যদি $f(x)$ এটা বাস্তৱ সহগবিশিষ্ট বহুপদ ফলন হয় আৰু $f(x) = 0$-ৰ n-টা বাস্তৱ মূল থাকে, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $f'(x) = 0$ সমীকৰণৰ অতি কমপক্ষেও $(n-1)$টা বাস্তৱ মূল থাকিব।

(f) Solve $x^3 - 12x + 8 = 0$ by Cardano's method.

$x^3 - 12x + 8 = 0$ সমীকৰণটোক কাৰ্ডানৰ পদ্ধতিৰে সমাধান কৰা।

(g) If A is a n-rowed non-singular matrix, then show that $adj(adj\ A) = |A|^{n-2} \cdot A$.

যদি A এটা অনাএকবচনীয় n-শাৰীযুক্ত মৌলকক্ষ হয় তেন্তে দেখুউৱা যে $adj(adj\ A) = |A|^{n-2} \cdot A$.

(h) Determine the rank of the matrix A where :

A মৌলকক্ষটোৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা য'ত ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

4. Answer *(a)* **or** *(b)* and ***any one*** of *(c)*, *(d)* and *(e)* :

(a) ***অথবা*** *(b)* আৰু *(c)*, *(d)* আৰু *(e)*-ৰ ***যিকোনো এটাৰ*** উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) *(i)* If $x = \cos\theta + i\sin\theta$ and $\sqrt{1-c^2} = nc - 1$ then show that

$$1 + c\cos\theta = \frac{c}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right).$$ 4

যদি $x = \cos\theta + i\sin\theta$ আৰু $\sqrt{1-c^2} = nc - 1$ তেন্তে দেখুওৱা যে

$$1 + c\cos\theta = \frac{c}{2n}(1+nx)\left(1+\frac{n}{x}\right).$$

(ii) Solve the biquadratic equation $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$ by Euler's method. 6

অয়লাৰৰ পদ্ধতিৰে $x^4 - 8x^2 - 4x + 3 = 0$ চতুৰ্ঘাতীয় সমীকৰণটো সমাধান কৰা।

(b) *(i)* For any two complex numbers u and v, prove that :

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u . \sinh v .$$

4

যিকোনো দুটা জটিল সংখ্যা u আৰু v-ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা যে ঃ

$$\sinh(u+v) = \sinh u \cosh v + \cosh u . \sinh v .$$

(ii) If the equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ has two equal roots, then show that each of them is equal to $\dfrac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$. 6

যদি $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ সমীকৰণটোৰ দুটা সমান মূল থাকে, তেন্তে দেখুউৱা যে সমান মূল দুটাৰ প্ৰত্যেকৰে মান

$$\frac{bc-ad}{2(ac-b^2)}.$$

(c) (i) Find the inverse of A where :

A মৌলকক্ষটোৰ প্ৰতিলোম উলিওৱা য'ত ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ 5

(ii) If A and B are non-singular square matrices of the same order, then prove that AB is invertible and

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. 5

যদি A আৰু B দুটা অনাএকবচনীয় একে ক্ৰমৰ বৰ্গাকৃতিৰ মৌলকক্ষ হয় তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে AB-প্ৰতিলোমনীয় হয় আৰু

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(d) (i) Reduce the following matrix to echelon form and hence find its rank : 5

নিম্নোক্ত মৌলকক্ষটোক একেলন আকাৰলৈ লঘুকৃত কৰা আৰু তাৰপৰা ইয়াৰ কোটি নিৰ্ণয় কৰা ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

(ii) If A is an invertible matrix, then show that A^T is also invertible and

$(AT)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$. 2+3=5

যদি A এটা প্ৰতিলোমনীয় মৌলকক্ষ হয় তেন্তে দেখুউৱা যে A^T-ও প্ৰতিলোমনীয় হয় আৰু $(AT)^{-1} = (A^{-1})^T$.

(e) (i) Find the general solution of the following linear homogeneous system : 5

নিম্নোক্ত একক সমঘাতীয় সমীকৰণ প্ৰণালীটো সাধাৰণ সমাধান উলিউৱা ঃ

$$x - 2y + z - w = 0$$
$$x + y - 2z + 3w = 0$$
$$4x + y - 5z + 8w = 0$$
$$5x - 7y + 2z - w = 0$$

(ii) Show that the only real value of λ for which the following system of equations has non-zero solutions is 6 : 5

দেখুউৱা যে নিম্নোক্ত সমীকৰণ প্ৰণালীটোৰ অশূন্য সমধান থাকিবলৈ হ'লে λ-ৰ একমাত্ৰ বাস্তৱ মানটো হ'ব 6 :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$
$$3x + y + 2z = \lambda y$$
$$2x + 3y + z = \lambda z$$